Aula 18

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua sobre os pontos duma curva $C \subset D_f$ a qual é parametrizada por um caminho seccionalmente regular $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, com $C = \gamma([t_0, t_1])$. Então, define-se o **integral de f ao longo de γ**, e representa-se por $\int_\gamma f(z)dz$, ou mais simplesmente $\int_\gamma f$, como

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Proposição: Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções contínuas, $a, b \in \mathbb{C}$ constantes, e $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ parametrizações seccionalmente regulares de curvas em Ω. Então, tem-se

- $\displaystyle\int_\gamma (af + bg) = a \int_\gamma f + b \int_\gamma g.$
- $\displaystyle\int_{-\gamma} f = - \int_\gamma f$ ($-\gamma$ designa a parametrização em sentido inverso de γ).
- $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$ ($\gamma_1 + \gamma_2$ designa a concatenação dos caminhos γ_1 e γ_2).

Proposição: Um caminho $\tilde{\gamma} : [\tilde{t_0}, \tilde{t_1}] \to \mathbb{C}$ diz-se uma **reparametrização** da curva parametrizada por $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ se existe uma aplicação de classe C^1 $\alpha : [t_0, t_1] \to [\tilde{t_0}, \tilde{t_1}]$, com $\alpha'(t) > 0$ para todo o t, e $\alpha(t_0) = \tilde{t_0}$, $\alpha(t_1) = \tilde{t_1}$, tal que $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\alpha(t))$. Nesse caso, dada uma função contínua f nos pontos da curva, tem-se

$$\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f.$$

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua nos pontos duma curva em D_f parametrizada por um caminho seccionalmente regular γ. Então, tem-se

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq L(\gamma) \cdot \sup_t |f(\gamma(t))|,$$

onde $L(\gamma)$ designa o comprimento percorrido pela parametrização γ e dado por $\int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|dt$.

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo/Regra de Barrow):
Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua nos pontos duma curva em D_f parametrizada por um caminho seccionalmente regular γ e seja F uma função holomorfa sobre os pontos da curva tal que $F'(z) = f(z)$ nesses pontos.
Então, tem-se

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma F'(z)\, dz = F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)).$$

Em particular, se o caminho é fechado, tem-se que $\gamma(t_1) = \gamma(t_0)$ e

$$\oint_\gamma f(z) dz = \oint_\gamma F'(z) dz = 0.$$

Exemplos:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2}\, dz = 0$$

Conjuntos Conexos

Definição: Um conjunto Ω diz-se **desconexo** se existem dois abertos A_1, A_2 tais que:

- $\Omega \subset A_1 \cup A_2$
- $\Omega \cap A_1 \neq \emptyset$ e $\Omega \cap A_2 \neq \emptyset$
- $(\Omega \cap A_1) \cap (\Omega \cap A_2) = \emptyset$

Um conjunto Ω diz-se **conexo por arcos** se, dados quasiquer dois pontos $z_1, z_2 \in \Omega$ existe um caminho com imagem contida em Ω que os une.

Teorema: Se f é contínua e Ω é conexo, então $f(\Omega)$ é conexo.

Proposição: Se um conjunto é conexo por arcos então é conexo.
Se um conjunto é aberto e conexo, então é conexo por arcos.

Teorema (Teorema da Independência do Caminho): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua num domínio D_f aberto e conexo. Então as seguintes proposições são equivalentes entre si.

i) f tem primitiva em D_f, ou seja, uma função holomorfa $F : D_f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo o $z \in D_f$.

ii) Para qualquer caminho fechado γ em D_f tem-se

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$$

iii) Se $z_0, z_1 \in D_f$ são quaisquer dois pontos e $\gamma, \tilde{\gamma}$ quaisquer dois caminhos em D_f, de z_0 para z_1, tem-se

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz.$$